

Projektív-Konszenzus Algoritmusok Éles Konvergensebessége

Gerencsér Balázs^a, Gerencsér László^b

^a MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
gerencser.balazs@renyi.mta.hu

^b MTA SZTAKI
gerencser.laszlo@sztaki.mta.hu

Az előadás célja egy általános projektív-konszenzus probléma (ratio consensus) kapcsán kifejlesztett elosztott, aszinkron algoritmus (push-sum vagy weighted gossip)¹ konvergenciájával kapcsolatos éles eredmény bemutatása. A probléma verbálisan megfogalmazható úgy, hogy egy irányított hálózat csúcsaiban elhelyezett különböző mennyiségű és koncentrációjú oldatot akarunk lokális interakciókkal összekeverni úgy, hogy határértékben minden csúcsban azonos koncentrációjú oldat legyen.

Formálisan, tekintsük véletlen, nem-nemnegatív $p \times p$ -es mátrixoknak egy egy i.i.d., szekvenciálisan primitív (A_n) , $n \geq 1$ sorozatát, és legyenek $x, w \in \mathbb{R}^p$ olyan kezdeti értékek, amelyre $w \geq 0, w \neq 0$. Legyen $x_n = A_n A_{n-1} \cdots A_1 x$ és $w_n = A_n A_{n-1} \cdots A_1 w$. Ekkor igaz a következő tétel^{2,3}:

Tegyük fel, hogy (A_n) egy i.i.d. sorozat, $\mathbb{E} \log^+ \|A_n\| < \infty$, és a két első Ljapunov exponensre $\lambda_1 > \lambda_2$, vagyis a spektrális rés pozitív. Tegyük fel továbbá, hogy A_n minimális pozitív elemét α_n -nel jelölve $\mathbb{E} \log^- \alpha_n > -\infty$. Ekkor létezik egy olyan véletlen, pozitív v^1 sorvektor \mathbb{R}^p -ben, hogy - az i -dik egységvektort e_i -vel jelölve - minden i -re 1 valószínűséggel

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \left| \frac{e_i^\top x_n}{e_i^\top w_n} - \frac{v^1 \cdot x}{v^1 \cdot w} \right| \leq -(\lambda_1 - \lambda_2),$$

és a hibatag i -ben vett maximumára a baloldal határértéke pontosan $\lambda_1 - \lambda_2$.

A $e_i^\top x_n / e_i^\top w_n$ hányados az i -dik csúcsban az n -dik lépés után kialakult koncentrációként értelmezhető. A tétel szerint ezek legalább a megadott exponenciális sebességgel egy közös értékhez tartanak. A fenti tétel kiterjeszhető véletlen, nem-nemnegatív mátrixok szigorúan stacionárius, ergodikus, szekvenciálisan primitív sorozatára, alkalmas feltételek mellett.

¹D. Kempe, A. Dobra, and J. Gehrke: Gossip-based computation of aggregate information, Proc. of Foundations of Computer Science, IEEE, 482–491, (2003).

²B. Gerencsér and J. M. Hendrickx: Push sum with transmission failures, IEEE Transactions on Automatic Control, 64 (3), 1019–1033, (2019).

³B. Gerencsér and L. Gerencsér: Tight bounds on the convergence rate of generalized ratio consensus algorithms, arXiv:1901.11374, (2019).