

# Kifizetés nélküli általánosított párosítási játékok nehézsége

Király Tamás<sup>a</sup>, Mészáros-Karkus Zsuzsa<sup>a</sup>

<sup>a</sup> ELTE TTK Operációkutatási Tanszék  
MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport  
tkiraly@cs.elte.hu, karkuszsuzsi@gmail.com

Az általánosított párosítási játékokban adott egy  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf, és  $V$ -nek egy  $V_1, \dots, V_n$  partíciója. A  $V_i$  csúcshalmaz az  $i$ -edik játékoshoz tartozik, és egy  $M$  párosítás értéke az  $i$ -edik játékos számára  $|V_i \cap V(M)|$ , ahol  $V(M)$  az  $M$  által fedett csúcsok halmaza. A játékot a nemzetközi vesecseré-probléma motiválja: a csúcsok inkompatibilis betegdonor pároknak felelnek meg, az élek lehetséges cseréknek, a  $V_i$  csúcshalmazok pedig az egyes országoknak. Egy párosítás tehát páros cserék egy lehetséges módját jelenti, értéke pedig egy ország számára a cserében részt vevő betegeknek a száma. Országok egy adott koalíciója azon párosításokat tudja megvalósítani, amik csak az ő csúcsait használják.

A játék kifizetéses változatát Biró és társszerzői<sup>1</sup> vizsgálták, és belátták, hogy legfeljebb kételemű országok esetén a mag nemüressége polinom időben eldönthető, háromelemű országok esetén azonban coNP-teljes.

Kifizetés nélküli esetben meg kell különböztetnünk a gyenge és erős magot. A gyenge magban olyan  $M$  párosítások vannak, ahol egy koalíció sem tud olyan párosítást megvalósítani, ami a koalíció minden tagja számára jobb (azaz több csúcsot fed), mint  $M$ . Az erős mag párosításaihoz olyan koalíció és általa megvalósítható párosítás sincs, ahol mindenki legalább olyan jól jár, mint  $M$ -nél, de legalább egy játékos jobban.

Megmutatjuk, hogy általános esetben már azt is coNP-teljes eldönteni, hogy egy adott  $M$  párosítás a gyenge illetve az erős magban van-e. Sőt, ETH-t feltételezve nincs  $2^{o(n)}$  poly( $m$ ) futási idejű algoritmus, ahol  $n$  az országok száma,  $m$  pedig a gráf mérete.

Belátjuk azt is, hogy legfeljebb kételemű országok esetén polinomiális időben eldönthető, hogy adott  $M$  párosítás a gyenge/erős magban van-e. A gyenge mag ebben az esetben sosem üres.

**Köszönetnyilvánítás:** A szerzők szeretnék megköszönni Biró Péternek és Jankó Zsuzsannának a téma felvetését és a róla folytatott beszélgetéseket. A kutatást a KEP-6/2017 projekt és az NKFIH K120254 számú pályázata támogatta.

<sup>1</sup>P. Biró, W. Kern, D. Pálvölgyi, D. Paulusma: Generalized Matching Games for International Kidney Exchange, AAMAS 2019.