

# Lineáris egyenletrendszer konzisztenciájának kombinatorikai jelentései

Pluhár András<sup>a</sup>

<sup>a</sup> SZTE, Számítógépes Optimalizálás tanszék

pluhar@inf.u-szeged.hu

A lineáris algebra sokszor, így tulajdonképpen nem váratlanul, megjelenik kombinatorikai állítások bizonyításában. Mi több, motiválhatja is új kérdések feltételét. Kis túlzással bármely lineáris algebrai eredmény átírható kombinatorikai formára.

A jelen előadás célja az  $Ax=b$  egyenletrendszer konzisztenciájára vonatkozó tétel kombinatorikus következményeinek feltárása.  $Ax=b$  (tetszőleges test felett) megoldhatatlan akkor és csak akkor, ha létezik olyan  $y$  vektor, amelyre  $yAx=0$  és  $yb$  nem nulla.

A fenti karakterizáció néhány következménye (2-elemű test felett):

König tétel (gráf kétrészes akkor és csak akkor, ha nincs páratlan zárt séta benne). Értelmezhető a König tétel *duálisa* is: mikor van  $G$  gráfnak olyan feszítő részgráfja, amely minden pont páratlan fokszámú?

Harary tétel (előjeles gráf kiegyensúlyozott, ha nincs benne negatív kör). Ez szintén dualizálható, az alábbi módon: Adott  $G$  gráfra  $V(G)$  az  $A$  és  $B$  uniója. Mikor van  $G$ -nek olyan feszítő részgráfja, amely  $A$  pontjaiban páratlan, míg  $B$  pontjaiban páros fokszámú?

A nyaklánc problémában  $n$ -féle egyenként páros számú követ kell elosztani egyenlően két részre legfeljebb  $n$  vágással. Ez a Borsuk-Ulam tétel szerint lehetséges, nem konstruktív megoldást ad. A speciális eset, ha minden kőből két darab van az ún. *paint shop* probléma. (A vágások számának a minimalizálása NP-nehéz feladat, Epping és társai.) Itt a konzisztencia szerint elég  $n$  vágás, a Gauss elimináció gyors megoldást ad.

Hasonló eredményeket kapunk, ha egy fán helyezük el a köveket. Az általános eset, azaz amikor egy fán helyezünk el  $n$ -féle követ (mindegyikből páros sokat téve) nehéznek tűnik. A sejtésünk szerint  $nd/2$  felső egész rész vágás elég lehet.

**Köszönetnyilvánítás:** Jelen kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal az SNN-117879 sz. pályázatával támogatta.